Όνομα: Γεώργιος Καζεντζής Ημερ. Παρ: 23-11-2002

Α.Μ: 1367 20-11-2002

HY-215

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

5^{η} Σειρά Ασκήσεων

1. Έστω $x(t)$ και $y(t)$ δύο μιγαδικά σήματα και

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\,y(t+\tau)\,dt$$

η συνάρτηση ετεροσυσχέτισής τους. Έστω $X(f)$ και $Y(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier των δύο αυτών σημάτων. Δείξτε ότι:

- $\phi_{yx}(\tau) \longleftrightarrow Y^*(f)X(f)$
- $\phi_{xy}^*(-\tau) = \phi_{yx}(\tau)$
- $\phi_{yx}^*(-\tau) = \phi_{xy}(\tau)$

- Κάνουμε το μετασχηματισμό Fourier της $\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)\,x(t+\tau)\,dt$:

15/15

$$F\{\phi_{yx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)\,x(t+\tau)\,dt\right)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)\,X(f)\,e^{j2\pi ft}\,dt =$$

$$= X(f)\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)\,e^{j2\pi ft}\,dt =$$

$$= X(f)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt\right)^* =$$

$$= X(f)\,Y^*(f).$$

• Θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi^*_{xy}(-\tau) = \phi_{yx}(\tau)$.

Είναι $\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)\,x(t+\tau)\,dt$ ①

Επίσης, $\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\,y(t+\tau)\,dt \Longrightarrow$ (Θέτω όπου τ το $-\tau$)

$\Longrightarrow \phi_{xy}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\,y(t-\tau)\,dt \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \phi^*_{xy}(-\tau) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\,y(t-\tau)\,dt\right)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt$.

Θέτω $\omega = t-\tau \Rightarrow d\omega = dt$. Άρα έχουμε:

$\phi^*_{xy}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega+\tau)\,y^*(\omega)\,d\omega$. (Θέτω $\omega = u \Rightarrow d\omega = du$. Άρα θα έχουμε: $\phi^*_{xy}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u+\tau)\,y^*(u)\,du$.) Τέλος, θέτω $u = t \Rightarrow$

$\Rightarrow du = dt$ και έχουμε $\phi^*_{xy}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\,y^*(t)\,dt$ ②.

Από ①, ② προκύπτει η ζητούμενη σχέση. ✓

• Θέλουμε να δείξουμε ότι $\phi_{xy}(\tau) = \phi^*_{yx}(-\tau)$.

Είναι $\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\,y(t+\tau)\,dt$ ①

Επίσης, $\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\,y^*(t)\,dt \Longrightarrow$ (Θέτω όπου τ το $-\tau$)

$\Longrightarrow \phi_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\,y^*(t)\,dt \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \phi^*_{yx}(-\tau) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\,y^*(t)\,dt\right)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t-\tau)\,y(t)\,dt$.

Θέτω $w = t - \tau \Rightarrow dw = dt$. Άρα θα έχουμε:

$\phi^*_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(w)\, y(w+\tau)\, dw$. Θέτω $w = u \Rightarrow dw = du$ και τότε είναι:

$\phi^*_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(u)\, y(u+\tau)\, du$. Τέλος, θέτω $u = t \Rightarrow du = dt$ και είναι

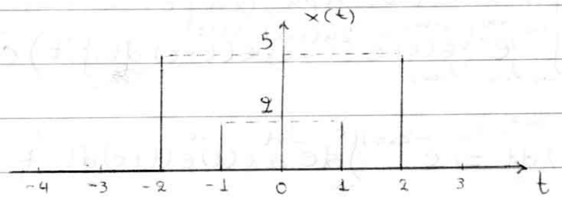
$\phi^*_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt$. ② Από ①, ② προκύπτει το ζητούμενο. ✓

15/18

7. Έστω το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} 5, & t = -2 \\ 2, & t = -1 \\ 2, & t = 1 \\ 5, & t = 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Σχεδιάστε το $x(t)$
- Γράψτε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό της συνάρτησης Dirac.
- Υπολογίστε το Μ.Φ. του $x(t)$.

- 

✓

- Η $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = 5\delta(t+2) + 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + 5\delta(t-2).$$

• Ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$F\{x(t)\} = 5F\{\delta(t+2)\} + 2F\{\delta(t+1)\} + 2F\{\delta(t-1)\} + 5F\{\delta(t-2)\} =$$

$$= 5e^{j2\pi 2f} + 2e^{j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} + 5e^{-j2\pi 2f} =$$

$$= 5e^{j2\pi 2f} + 5e^{-j2\pi 2f} + 2e^{j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} =$$

$$= 5\cdot 2\cos(2\pi 2f) + 2\cdot 2\cos(2\pi f) =$$

$$= 10\cos(4\pi f) + 4\cos(2\pi f) =$$

$$= 10\left(2\cos^2(2\pi f) - 1\right) + 4\cos(2\pi f) =$$

$$= 20\cdot\cos^2(2\pi f) - 10 + 4\cos(2\pi f) =$$

$$= 20\cos^2(2\pi f) + 4\cos(2\pi f) - 10. \quad V$$

6. Αποδείξτε ότι για τα σήματα: 40/40

$$x(t) = e^{-\alpha t}\epsilon(t)$$

$$y(t) = e^{-2\alpha t}\epsilon(t)$$

ισχύει: $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$, όπου $\Phi_{xy}(f)$ η συνάρτηση διαφασματική πυκνότητας της ενέργειας, $\alpha>0$.

Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης των $x(t), y(t)$ είναι:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\,y(t+\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\epsilon(t)\,e^{-2\alpha(t+\tau)}\epsilon(t+\tau)\,dt.$$

Έχουμε $\Phi_{xy}(f) = F\{\varphi_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\epsilon(t)\,e^{-2\alpha(t+\tau)}\epsilon(t+\tau)\,dt\right)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\epsilon(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha(t+\tau)}\epsilon(t+\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\epsilon(t)\int_{-\infty}^{+\infty} y(t+\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\epsilon(t)\cdot Y(f)\,e^{j2\pi f t}\,dt = Y(f)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\epsilon(t)\,e^{j2\pi f t}\,dt =$$

$$= Y(f)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-at}\epsilon(t)}_{x(t)} e^{-j2\pi f t}\,dt\right)^{*} = Y(f)\,X^{*}(f) = X^{*}(f)\,Y(f).$$

5. Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων: 20/20

$$x(t) = e^{-at}\epsilon(t)$$

$$y(t) = e^{-2at}\epsilon(t)$$

όπου

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$

Σχεδιάστε τα αρχικά σήματα καθώς και τις μετακινήσεις των σημάτων για αρνητική και θετική μετακίνηση. Πώς θα πρέπει να επιλεγεί η τιμή της συνάρτησης $\epsilon(t)$ για $t=0$ ώστε να μπορούμε να γράψουμε ότι το αποτέλεσμα που βρήκαμε να ισχύει για κάθε t;

Είναι $x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\,y(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au}\epsilon(u)\,e^{-2a(t-u)}\epsilon(t-u)\,du =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au}\epsilon(u)\,e^{-2at}\cdot e^{2au}\cdot\epsilon(t-u)\,du = e^{-2at}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{au}\epsilon(u)\,\epsilon(t-u)\,du.$$

Είναι όμως $\epsilon(t-u) = \begin{cases} 0, & t<u \\ 1, & t>u \end{cases}$. Άρα θα έχουμε $x(t)*y(t) =$

$$= e^{-2at}\int_{-\infty}^{t} e^{au}\epsilon(u)\,\overset{1}{\epsilon(t-u)}\,du + e^{-2at}\int_{t}^{+\infty} e^{au}\epsilon(u)\,\overset{0}{\epsilon(t-u)}\,du =$$

$$= e^{-2at}\int_{-\infty}^{t} e^{au}\epsilon(u)\,du = e^{-2at}\int_{-\infty}^{0} e^{au}\overset{0}{\epsilon(u)}\,du + e^{-2at}\int_{0}^{t} e^{au}\overset{1}{\epsilon(u)}\,du =$$

$$= e^{-2at}\int_{0}^{t} e^{au}\,du = e^{-2at}\,\frac{1}{a}\,e^{au}\Big]_{u=0}^{u=t} = \frac{1}{a}\left(e^{-at} - e^{-2at}\right).$$

15/15

Για ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση.

Έχουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι η $\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\varphi_x(\tau) = \varphi_x(-\tau)$.

Είναι $\varphi_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t-\tau)\, dt$. Όμως, το σήμα είναι πραγματικό

και ισχύει $x^*(t) = x(t)$ και τότε $\varphi_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$. (1)

Επίσης, $\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt$. Από (1), προχωράμε ως εξής:

Θέτω $\omega = t - \tau \Rightarrow d\omega = dt$ και τότε $\varphi_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\omega+\tau)\, x(\omega)\, d\omega$.

Θέτουμε ξανά $t = \omega \Rightarrow dt = d\omega$ και $\varphi_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, x(t)\, dt$.

✓

10/10

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt \right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$$

δείξτε ότι:

- η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης έχει μέγιστο για $\tau = 0$.
- η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχει μέγιστο για $\tau = 0$

- Έχουμε: $|\varphi_x(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt \right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t)\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, x(t)\, dt = \varphi_x(0) \cdot \varphi_x(0) = \varphi_x^2(0) \Rightarrow$

$$\Longrightarrow \sqrt{|\varphi_x(\tau)|^2} \leq \sqrt{(\varphi_x(0))^2} \Longrightarrow \boxed{|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(0)}$$ ✓

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε συνάρτηση αυτοσυσχέτισης, είτε πραγματική είτε μιγαδική. Σε περίπτωση μιγαδικής, παίρνουμε το μέτρο της φ_x.

- Είναι $|\varphi_{xy}(\tau)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)y(t)dt = \varphi_{xx}(0) \cdot \varphi_{yy}(0)$$ ✓